Algebra lineare

MASTER COPY

Raccolta delle definizioni

Tel. 388/9837745

$\mathbb{R}^n$: Fissato un generico intero n, si chiamerà $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali; n si dirà dimensione di $\mathbb{R}^n$.

Vettore in $\mathbb{R}^n$: Si definisce vettore a n componenti una n-upla ordinata di numeri reali.

Somma di vettori: Dati due vettori in $\mathbb{R}^n$, si definisce la loro somma come il vettore che ha per componenti la somma delle loro componenti corrispondenti.

Vettore nullo: In ogni spazio $\mathbb{R}^n$, si denoterà con 0 il vettore che ha tutte le componenti nulle.

Opposto di un vettore: Dato un vettore v in $\mathbb{R}^n$, il suo opposto è il vettore ottenuto cambiandone di segno tutte le componenti.

Differenza tra due vettori: La differenza tra due vettori è definita come la somma del primo con l'opposto del secondo.

Spazio vettoriale: Definiamo spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ un insieme V dotato delle due seguenti applicazioni:

1. Somma: $V \times V \to V$
   $(v, w) \to v + w$

2. Prodotto per scalare: $\mathbb{K} \times V \to V$
$(a, v) \to a \cdot v$

tali che valgano le seguenti proprietà:

1 - Proprietà associativa della somma
2 - Proprietà commutativa della somma
3 - Esistenza dell'elemento neutro della somma
4 - Esistenza dell'elemento opposto o inverso relativamente alla somma
5 - Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma
6 - Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{K}$
7 - Proprietà associativa del prodotto
8 - Esistenza dell'elemento neutro per il prodotto

Norma di un vettore: Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ si definisce norma di u il numero $|u|$ che si ottiene sommando i quadrati delle sue componenti e estraendo la radice quadrata del risultato.

Versore: Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^n$, e supposto $u \neq 0$, si definisce versore di u il vettore ottenuto considerando il multiplo secondo il reciproco della sua norma, ovvero $u/|u|$.

Distanza euclidea: Dati due vettori u e v in $\mathbb{R}^n$, si definisce la loro distanza euclidea $d(u,v)$ come la norma del loro vettore differenza, e cioè la radice quadrata della somma dei

quadrati delle differenze delle loro coordinate corrispondenti.

Prodotto scalare: Dati due vettori arbitrari in $\mathbb{R}^n$, definiamo il loro prodotto scalare come lo scalare ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti.

Vettori ortogonali: Due vettori in $\mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare vale zero.

Spazio euclideo: Si dice spazio euclideo uno spazio vettoriale sul quale sia definito un prodotto scalare, ovvero una funzione bilineare, simmetrica e definita positiva. Dato poi un prodotto scalare si può sempre definire una norma ponendo $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$; perciò ogni spazio euclideo è anche normato.

Coseno dell'angolo in $\mathbb{R}^n$: Dati due vettori in $\mathbb{R}^n$, si definisce il coseno dell'angolo da essi formato come il rapporto fra il loro prodotto scalare e il prodotto delle loro norme.

Proiezione ortogonale: Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, si definisce proiezione di u nella direzione di v il vettore $P_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Se v è un versore: $P_v u \equiv (u \cdot v) v$

Prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$: Dati u e $v \in \mathbb{R}^3$, si definisce il loro prodotto vettore, o prodotto esterno, $u \wedge v$ ponendo:

$$u \wedge v \equiv \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Span: Insieme delle combinazioni lineari $\langle x, y, z \rangle$ t.c:
$\langle x, y, z \rangle = \{ \alpha x + \beta y + \gamma z : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$
Questo insieme è lo spazio generato dai vettori dati ed è un sottospazio dello spazio vettoriale.

Sottospazio: X si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se è contenuto in $\mathbb{R}^n$ e inoltre è chiuso rispetto alla somma e rispetto ai multipli scalari:

X SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^n$

① $X \subseteq \mathbb{R}^n$

② $x, x' \in X \rightarrow x + x' \in X$
$\lambda \in \mathbb{R}, x \in X \rightarrow \lambda x \in X$

Sistema ortogonale: Sistema in cui i vettori sono ortogonali 2 a 2

$$e_1, e_2, \ldots, e_n : e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a \neq 0 & i = j \end{cases}$$

Sistema ortonormale: Sistema ortogonale di versori

$$e_1, e_2, \ldots, e_n : e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$e_i \cdot e_i = |e_i|^2 = 1$$

Complemento ortogonale: Il complemento ortogonale $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle^\perp$ è l'insieme dei vettori X di $\mathbb{R}^n$ perpendicolari ad ogni vettore dello spazio $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$.

Proiezione su un sottospazio: Sia X uno spazio euclideo e siano $e_1, e_2 \dots e_m$ i vettori di un sistema ortogonale. Si pone allora:

$$u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle} = \sum_{i=1}^{m} u_{e_i}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

e si chiamerà proiezione di u sullo spazio generato da $e_1, e_2, \dots, e_m$.

Combinazione lineare: Dati n vettori $x_1, x_2 \dots x_n$ in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si ha una combinazione lineare se

$$\forall w \in \mathbb{R}^n, \exists a_1, a_2 \dots a_n : w = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Dipendenza lineare: Un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è detto linearmente dipendente se uno dei vettori è combinazione lineare degli altri. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_1, x_2 \dots x_n$ siano dipendenti è che esistono $a_1, a_2 \dots a_n$ non tutti nulli tali che:

$$\sum_{1}^{n} a_i x_i = 0$$

Indipendenza lineare: $x_1, x_2 \dots x_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se:

$$\sum_{1}^{n} a_i x_i = 0 \implies a_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$$